



## Systèmes hamiltoniens à ports de dimension infinie : réduction et propriétés spectrales.

Yann Le Gorrec, Hui Peng, Laurent Lefèvre, Boussag Hamroun, Françoise  
Couenne

### ► To cite this version:

Yann Le Gorrec, Hui Peng, Laurent Lefèvre, Boussag Hamroun, Françoise Couenne. Systèmes hamiltoniens à ports de dimension infinie : réduction et propriétés spectrales.. Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA), 2011, 45 (7-10), pp.645-664. hal-00803331

**HAL Id: hal-00803331**

**<https://hal.science/hal-00803331>**

Submitted on 21 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Systèmes hamiltoniens à ports de dimension infinie : réduction et propriétés spectrales

**Yann Le Gorrec\*** — **Hui Peng\*\*** — **Laurent Lefèvre\*\*\*** — **Boussad Hamroun\*\*** — **Francoise Couenne\*\***

\* FEMTO-ST AS2M, ENSMM, 24 rue Alain Savary, 25 000 Besancon France,  
Yann.Le.Gorrec@ens2m.fr

\*\* LAGEP, Université de Lyon, F-69622, Lyon, France; Université Lyon 1, Villeurbanne, nom@lagep.univ-lyon1.fr

\*\*\* LCIS, INP Grenoble, 50, rue Barthélémy de Laffemas BP54 26902 VALENCE Cedex 09 France, laurent.lefevre@esisar.inpg.fr

---

*RÉSUMÉ. Dans ce papier on s'intéresse aux propriétés spectrales des systèmes hamiltoniens à ports de dimension infinie. On montre que le spectre de tels systèmes peut être déduit du spectre associé à une structure canonique, la structure de Stokes-Dirac, à l'aide de transformations géométriques simples telles que des homothéties, translations ou dilatations. On montrera en particulier que les spectres des systèmes d'équations d'onde et de diffusion peuvent être déduits du même spectre canonique. Enfin on étudiera les propriétés de convergence d'une méthode de réduction structurée de type éléments finis mixtes sur un problème de diffusion. Pour cela on montrera la convergence du spectre de la structure réduite vers le spectre de la structure canonique de Stokes-Dirac, puis on en déduira les propriétés de convergence finale par transformation géométrique.*

*ABSTRACT. This paper deals with spectral properties of infinite dimensional Port Hamiltonian systems. It is shown that the spectra of these systems can be deduced from the spectrum associated to a canonical structure, the Stokes Dirac structure, thanks to geometric transformations such as homothety, translations or dilations. In particular, it is shown that the spectrum of the wave equation system and of the diffusion system can be deduced from the same canonical spectrum. Finally the spectral convergence properties of a mixed finite element based spatial reduction methods is studied of a diffusion system. To this purpose, the convergence of the spectrum of the reduced structure to the spectrum of the canonical Stoke Dirac structure is proved. It is obtained from the convergence properties of the canonical structure through geometric transformations.*

*MOTS-CLÉS : Systèmes hamiltoniens à ports, analyse spectrale, réduction géométrique*

*KEYWORDS: Port Hamiltonian systems, spectral analysis, geometric reduction*

---

## Notations

- $H^1([a, b], \mathbb{R}^2)$  Espace de Sobolev des fonctions une fois *faiblement* dérivables de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,
- $L^2([a, b], \mathbb{R}^2)$  Espace des fonctions de carré intégrable de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,
- $\mathcal{D}$  Structure de Dirac,
- $\mathcal{D}_A$  Domaine de l'opérateur  $A$ ,
- $\rho(A)$  Ensemble résolvant de  $A$ .

## 1. Introduction

L'analyse dynamique des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles (EDP) implique, dans le cas linéaire, le calcul des valeurs et vecteurs propres ou la mise en place de schémas numériques de discrétisation spatiale (Le Pourhiet, 1988). Ces deux alternatives peuvent présenter selon l'application traitée un effort certain en termes de complexité ou de temps de calcul. Or, nombre de systèmes à analyser sont issus de lois de conservation sur des variables extensives (variables dépendant de la quantité de matière considérée, telles que le volume, la quantité de mouvement, le nombre de moles...) et d'équations constitutives définissant les variables intensives (variables indépendantes de la quantité de matière considérée, telles que la température, la pression...). Il est donc tout à fait naturel de s'intéresser au lien existant entre la structure du modèle, définie par l'ensemble des lois de conservation considérées, et son spectre. Dans cet article nous mettrons en évidence de tels liens dans le cas monodimensionnel (1D) par le biais de l'utilisation du formalisme hamiltonien à ports et plus particulièrement de la structure géométrique qui lui est associée, la structure de Dirac (Courant, 1990).

Depuis les premiers travaux de (van der Schaft *et al.*, 2002; Maschke *et al.*, 2000) l'approche hamiltonienne à ports a connu un grand essor dans le cadre de l'analyse et de la commande des systèmes mécaniques ou électriques. Particulièrement adaptée à l'étude de systèmes en réseau (systèmes interconnectés) cette approche exprime le fait que, dans le cas non dissipatif (systèmes mécaniques sans forces de frottement, etc.), la trajectoire d'un système évolue au sein d'une structure géométrique conservatrice de puissance, appelée structure de Dirac. Elle met de plus en relation l'énergie du système, les forces motrices et la dynamique engendrée. La formulation hamiltonienne à ports a été généralisée au cas des systèmes de dimension infinie (van der Schaft *et al.*, 2002; Le Gorrec *et al.*, 2005) en intégrant les variables frontières à la structure géométrique, mettant en relation l'évolution de l'énergie interne et les flux de puissance à la frontière. L'utilisation de cette structure géométrique, appelée structure de Dirac, a montré toute son efficacité pour l'analyse des solutions et la synthèse de lois de commande stabilisantes de type commande frontière (Le Gorrec *et al.*, 2005). Comme dans le cas de la dimension finie, on peut montrer que le cas dissipatif peut être traité à l'aide des mêmes outils, la dissipation étant prise en compte sous forme de feedback positif sur une structure géométrique étendue, interprétable dans ce cas

comme une structure d'interconnexion entre des termes de nature énergétique différente : accumulation et dissipation. La structure géométrique joue un rôle central dans ce type de modélisation. Il est donc naturel, d'un point de vue dynamique, d'étudier la relation qu'il peut y avoir entre spectre de l'opérateur associé au système dynamique et la structure de Dirac. Dans cet article nous étudierons cette relation dans le cas d'un système hyperbolique puis d'un système parabolique. Nous montrerons que les spectres de ces systèmes peuvent être déduits respectivement par homothétie ou rotation-dilatation du spectre du système dynamique associé à la structure de Stokes-Dirac (structure canonique de Dirac).

Parallèlement à ces approches ont été développées des techniques de réduction spatiale ayant pour objectif la conservation de cette structure géométrique lors de la réduction (Golo *et al.*, 2004; Baaij *et al.*, 2006; Baaij *et al.*, 2009; Moulla *et al.*, 2011). Ces travaux ont montré qu'il était possible, par un choix approprié des bases d'approximation des différentes variables de préserver la structure du modèle original en dimension infinie lors de la réduction. Cette conservation des propriétés énergétiques lors de la réduction a été évaluée qualitativement (Peng *et al.*, 2007). Dans ce qui suit on s'intéresse aux propriétés spectrales du schéma discrétisé. En particulier on s'intéresse aux propriétés de convergence de la méthode de réduction. Cela revient à étudier si, en augmentant le nombre d'éléments de discrétisation à l'infini, le spectre du modèle discrétisé converge bien vers le spectre discret associé à l'opérateur différentiel. On va pour cela utiliser les relations existant entre spectre et structure. Nous démontrerons que le spectre de la structure d'interconnexion réduite (structure de Dirac de dimension finie) converge vers le spectre de la structure d'interconnexion canonique de Stokes-Dirac de dimension infinie.

Cet article est organisé de la manière suivante : après avoir défini la classe de systèmes considérée nous définirons le spectre canonique associé à la structure canonique de Stokes-Dirac. Dans un second temps, nous montrerons les propriétés que satisfont les différents spectres associés aux deux exemples linéaires hyperbolique (corde vibrante) et parabolique (chaleur) obtenus en considérant les deux types d'équations de fermeture correspondant. Enfin, nous étudierons, dans le cas d'un système de conduction, la convergence spectrale d'une méthode de réduction par éléments finis mixtes structurée. Cette démonstration utilisera les propriétés géométriques mises en évidence dans la première partie.

## 2. Structure de Dirac, systèmes hamiltoniens à ports, systèmes dissipatifs

Dans ce qui suit nous nous intéressons à la classe de systèmes 1D définis sur  $Z \subset [a, b]$  par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (\mathcal{J} - \mathcal{G}D(z)\mathcal{G}^*) \frac{\delta H}{\delta x} \quad [1]$$

où  $x(t, z) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $\mathcal{J}$  est un opérateur différentiel formellement antisymétrique  $\mathcal{G}$  un opérateur quelconque ayant pour adjoint formel  $\mathcal{G}^*$ ,  $D(z)$  une

matrice définie non négative  $\in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $m$  représentant le nombre de ports dissipatifs, et  $H(x)$  est l'hamiltonien du système (fonction d'énergie) défini par :

$$H(x) = \frac{1}{2} \int_a^b \mathcal{H}(x) dz = \frac{1}{2} \int_a^b x^T \mathcal{L} x dz \quad [2]$$

où  $\mathcal{L} > 0$  est une matrice constante  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{H}$  est la densité d'énergie et  $\frac{\delta H}{\delta x}$  est la dérivée variationnelle (Duindam *et al.*, 2009) de  $H$  qui vérifie dans notre cas  $\frac{\delta H}{\delta x} = \frac{d\mathcal{H}}{dx}$ . Le domaine de l'opérateur et les conditions frontières permettant de caractériser les solutions de l'EDP [1] seront précisées ultérieurement. Les systèmes ainsi définis sont des *Systèmes hamiltoniens à ports dissipatifs*. Dans ce qui suit, nous limiterons notre étude au cas des systèmes ayant pour opérateur  $\mathcal{J}$  :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \quad [3]$$

appelé par la suite opérateur canonique. Dans ce cas  $n = 2$ .

### 2.1. Cas non dissipatif

Dans le cas où  $D = 0$ , ces systèmes sont liés à l'existence d'une structure géométrique sous-jacente appelée structure de Stokes-Dirac, traduisant la conservation de la puissance. Cette structure est définie à partir de couples de variables de puissance, appelées variable de ports, dans le domaine spatial et aux frontières et d'un produit de puissance symétrisé.

Les variables de ports dans le domaine sont données par  $f \in L^2([a, b], \mathbb{R}^2)$  et  $e \in H^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ , appelée respectivement variable de flux et variable d'effort. Les variables de ports à la frontière sont données par  $f_\partial \in \mathbb{R}^2$  et  $e_\partial \in \mathbb{R}^2$ . Le produit de puissance symétrisé vérifie<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \langle\langle (f^1, f_\partial^1, e^1, e_\partial^1), (f^2, f_\partial^2, e^2, e_\partial^2) \rangle\rangle &= \langle f^2, e^1 \rangle_{L^2} + \langle f^1, e^2 \rangle_{L^2} \\ &\quad - \langle f_\partial^2, e_\partial^1 \rangle - \langle f_\partial^1, e_\partial^2 \rangle \end{aligned} \quad [4]$$

où  $(f^1, f_\partial^1, e^1, e_\partial^1)$  et  $(f^2, f_\partial^2, e^2, e_\partial^2)$  appartiennent à  $B = F \times E$ , avec  $F = L^2([a, b], \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$  l'espace des flux et  $E = H^1([a, b], \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$  l'espace des efforts.

**Définition 1** Une structure de Dirac  $\mathcal{D}$  est un sous-espace de  $F \times E$  maximale isotropique respectivement au produit canonique [4], soit :  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$  où :

$$\mathcal{D}^\perp = \{b \in B | \langle\langle b, b' \rangle\rangle = 0, \forall b' \in \mathcal{D}\} \quad [5]$$

1.  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{L^2}$  représente le produit canonique sur  $L^2([a, b], \mathbb{R}^2)$  c'est-à-dire  $\langle e^T, f \rangle_{L^2} = \int_a^b f^T e \, dz$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit canonique sur  $\mathbb{R}^2$  c'est-à-dire  $\langle e_\partial, f_\partial \rangle = f_\partial^T e_\partial$

Il est montré dans (Le Gorrec *et al.*, 2005) que les variables de ports à la frontière  $(f_\partial, e_\partial)$  peuvent être définies de manière non unique (à une transformation unitaire prêt) par une combinaison linéaire des variables d'effort à la frontière de telle sorte que le système défini par  $f = \mathcal{J}e$  appartienne à une structure de Dirac, c'est-à-dire que  $(f, f_\partial, e, e_\partial) \in \mathcal{D}$ . Comme indiqué précédemment, un système hamiltonien à ports est défini à partir d'une fonction d'énergie, appelée fonction hamiltonienne, et du fait que sa dynamique dérive de ce potentiel et évolue au sein d'une structure de Dirac.

**Définition 2** *Considérons la structure de Dirac  $\mathcal{D}$  précédemment définie sur l'espace  $B$  et la fonction hamiltonienne  $H(x) : L^2([a, b], \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $x$  représente le vecteur des variables d'énergie. Définissons les variables de flux comme étant les dérivées temporelles des variables d'énergie et les variables d'effort comme étant les dérivées variationnelles de  $H$ . Le système défini par :*

$$(f, f_\partial, e, e_\partial) = \left( \dot{x}, f_\partial, \frac{\delta H}{\delta x}, e_\partial \right) \in \mathcal{D} \quad [6]$$

*est un système hamiltonien à ports, d'énergie  $H(x)$ .*

Dans ce cas, le bilan d'énergie dans le domaine est lié au flux de puissance à la frontière par le biais des variables de ports à la frontière :

$$\frac{dH}{dt} = e_\partial^T f_\partial$$

**Exemple 1 Corde vibrante** : *La dynamique de la corde vibrante s'écrit sur  $[a, b]$  à partir de l'équation de Newton et de la loi de Hooke :*

$$\mu(z) \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( T(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad [7]$$

où  $u(z, t)$  représente la position d'un point sur la corde,  $\mu(z)$  la densité linéique de masse et  $T(z)$  la constante d'élasticité.

*Choisissons comme variable d'état les variables suivantes :*

- la déformation  $\epsilon = \frac{\partial u(z, t)}{\partial z}$
- le moment élastique  $p = \mu(z)v(z, t)$ , où  $v(z, t) = \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}$  la vitesse en  $z$ .

*L'énergie totale est donnée par :  $H = U(\epsilon) + K(p)$*

- $U(\epsilon)$  est l'énergie potentielle élastique :

$$U(\epsilon) = \int_a^b \frac{1}{2} T(z) \left( \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz = \int_a^b \frac{1}{2} T(z) \epsilon(z, t)^2 dz$$

–  $K(p)$  est l'énergie cinétique :

$$K(p) = \int_a^b \frac{1}{2} \mu(z) v(z, t)^2 dz = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{p(z, t)^2}{\mu(z)} dz$$

L'énergie totale du système s'écrit :

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b \frac{1}{2} \left( T(z) \epsilon(z, t)^2 + \frac{p(z, t)^2}{\mu(z)} \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \begin{pmatrix} \epsilon & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(z) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ p \end{pmatrix} dz \end{aligned} \quad [8]$$

Définissons les variables de flux comme étant les dérivées par rapport au temps des variables d'état, c'est-à-dire  $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$ . Le couple de variables d'effort conjuguées aux variables de flux est donc défini par :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta \epsilon} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(z) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ p \end{pmatrix} \quad [9]$$

c'est-à-dire par la contrainte  $\sigma(z) = T(z)\epsilon(z)$  et la vitesse  $v(z)$ . Avec ce choix de variables de ports, le système [7] se met sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad [10]$$

Les variables de ports à la frontière peuvent être choisies comme suit pour définir une structure de Stokes-Dirac (Le Gorrec et al., 2005) :

$$\begin{pmatrix} e_{\partial a} \\ e_{\partial b} \\ f_{\partial a} \\ f_{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(a) \\ e_1(b) \\ e_2(a) \\ e_2(b) \end{pmatrix} \quad [11]$$

## 2.2. Cas dissipatif

Dans le cas où  $D \neq 0$ , la puissance n'est pas conservée :

$$\frac{dH}{dt} = e_{\partial}^T f_{\partial} - \int_a^b e^T \mathcal{G} D(z) \mathcal{G}^* e dz. \quad [12]$$

Le système peut tout de même être représenté à l'aide d'une structure de Dirac, qui est dans ce cas la structure d'interconnexion entre des parties du système de natures énergétiques différentes. En effet la structure de Dirac initiale peut être étendue aux couples de variables satisfaisant :

$$\begin{pmatrix} f \\ e_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J} & \mathcal{G} \\ -\mathcal{G}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f_e \end{pmatrix} \quad \text{avec } f_e = D e_e \quad [13]$$

par un choix approprié des variables de ports à la frontière (Le Gorrec et al., 2005).

**Exemple 2 Conduction de la chaleur**

Dans le cas purement dissipatif (la partie dynamique se réduit à une variable d'état et  $\mathcal{J} = 0$ ) comme dans l'équation de conduction de la chaleur mono dimensionnelle dans une barre de longueur  $[0, L]$ . Cette dernière peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}x(t, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(z) \frac{\partial}{\partial z} x(t, z) \right) \quad [14]$$

en posant  $f_1 = \frac{\partial}{\partial t}x(t, z)$ ,  $e_1 = x(t, z)$ ,  $f_2 = (D(z) \frac{\partial}{\partial z} x(t, z))$ , et  $e_2 = \frac{\partial}{\partial z}x(t, z)$  il vient :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad f_2 = D(z)e_2 \quad [15]$$

Dans ce cas les variables de ports à la frontière peuvent être choisies comme suit pour définir une structure de Dirac

$$\begin{pmatrix} e_{\partial 0} & e_{\partial L} & f_{\partial 0} & f_{\partial L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(0) & -e_1(L) & f_2(0) & f_2(L) \end{pmatrix} \quad [16]$$

**3. Propriétés spectrales**

Pour définir une structure de Stokes-Dirac associée à l'opérateur différentiel  $\mathcal{J}$  défini par [3], nous utiliserons la paramétrisation des variables de ports à la frontière proposée dans (Le Gorrec *et al.*, 2005).

**Définition 3** Les variables de ports à la frontière associées à l'opérateur différentiel [3] et au produit [4] sont les variables  $(f_{\partial}, e_{\partial})$  définies par :

$$\begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix} = U \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_{ext}} \begin{pmatrix} e(b) \\ e(a) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad U^T \Sigma U = \Sigma \quad [17]$$

$$\text{où } \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

**Théorème 1** Le sous-espace  $\mathcal{D}$  de  $B$  défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ f_{\partial} \\ e \\ e_{\partial} \end{pmatrix} \mid e \in H^1([a, b]; \mathbb{R}^2), f = \mathcal{J}e, \begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix} = R_{ext} \begin{pmatrix} e(b) \\ e(a) \end{pmatrix} \right\}$$

est une structure de Dirac.



Dans cette étude nous considérons les systèmes dont la solution existe et dont l'énergie ne croît pas lorsque l'entrée est nulle. Cela revient à considérer que le semi-groupe associé à cet opérateur est un semi-groupe de contraction. Pour cela nous utilisons le théorème 2 de (Le Gorrec *et al.*, 2005) qui permet de paramétrer le domaine de l'opérateur en fonction des conditions frontières de telle sorte que le semi-groupe généré soit un semi-groupe de contraction.

**Théorème 2** Soit  $W$  une matrice de rang plein de dimension  $2 \times 4$ ,  $\mathcal{J}$  l'opérateur défini par [3], et  $(f_\partial, e_\partial)$  les variables de ports à la frontière définies par [17]. L'opérateur  $A$  tel que

$$Ae = \mathcal{J}e \quad [18]$$

sur le domaine

$$\mathcal{D}_A = \left\{ e \in H^1([a, b]; \mathbb{R}^2) \mid \begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} \in \ker W \right\} \quad [19]$$

engendre un semi-groupe de contraction si et seulement si  $W\Sigma W^T \geq 0$  où  $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ .

**Remarque 1** Dans le cas de l'exemple 1 on retrouve les conditions de Dirichlet en posant :

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas  $W^T \Sigma W = 0$  et

$$\begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} \in \ker W \Leftrightarrow e_1(a) = e_2(b) = 0 \text{ soit } \sigma(t, a) = 0 = v(t, b)$$

Dans le cas de l'exemple 2, ce même choix aboutit à  $e_1(a) = f_2(b) = 0$  soit  $x(t, a) = 0 = D(b) \frac{dx(t, b)}{dz}$  c'est-à-dire à des conditions de type Dirichlet-Neumann. Le choix

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

aboutit à des conditions de type Neumann, plus connues en génie des procédés sous le nom de conditions de Dankwert.

Intéressons-nous maintenant au spectre de l'opérateur [18]. Rappelons que le spectre d'un opérateur  $A : \mathcal{D}_A \rightarrow L^2([a, b])$  défini sur un ensemble  $\mathcal{D}_A$  dense dans  $L^2([a, b])$  est défini comme le complémentaire de l'ensemble résolvant  $\rho(A)$ . L'ensemble résolvant est constitué des points  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que l'opérateur  $A - \lambda I$  est inversible. Ce spectre est en partie déterminé par les conditions frontières. Le

spectre est formé de l'union de plusieurs composantes. Une de ses composantes est l'ensemble des valeurs  $\lambda$  pour lesquelles l'opérateur  $(A - \lambda I)^{-1}$  n'existe pas ; cette partie est appelée le spectre discret de  $A$ . Ses éléments sont appelés valeurs propres. Les autres composantes du spectre concernent l'ensemble des valeurs pour lesquelles  $(A - \lambda I)^{-1}$  existe et est à domaine dense mais n'est pas borné et de l'ensemble des valeurs pour lesquelles  $(A - \lambda I)^{-1}$  existe mais n'est pas à domaine dense. Pour plus de renseignements concernant les différentes composantes du spectre d'un opérateur, le lecteur intéressé peut se référer à l'appendice 6 de (Curtain *et al.*, 1995). Pour un opérateur en dimension finie le spectre de l'opérateur est constitué de ses valeurs propres : le spectre est réduit à l'ensemble des valeurs  $\lambda$  tel que  $Ax = \lambda x$ .

Dans le cas de l'opérateur [18], l'opérateur résolvant est un opérateur compact et le spectre de  $\mathcal{A}$  est composé uniquement de valeurs propres isolées de multiplicité finie (voir la démonstration du théorème 2.26 (Villegas, 2007)).

On peut remarquer que la structure géométrique 1 permet de caractériser une large classe de systèmes. L'idée développée dans la suite de cet article consiste à comparer les spectres des différents systèmes engendrés par la même structure géométrique. Pour cela on considérera un spectre de référence, appelé spectre canonique correspondant au cas où la variable de flux est choisie telle que  $f = \dot{x}$  et la variable d'effort telle que  $e = x$ . Nous verrons ensuite comment évolue le spectre en fonction des différents types d'équations de fermeture envisageable.

**Définition 4** *Le spectre associé à la structure canonique de Stokes-Dirac, appelé dans ce qui suit spectre canonique, est constitué de l'ensemble des valeurs  $\lambda \in \mathbb{C}$  telles qu'il existe une solution non triviale telle que  $(\lambda\phi(z), f_\partial, \mathcal{J}\phi(z), e_\partial) \in \mathcal{D}$ . Ces valeurs sont solutions du problème aux valeurs propres :*

$$\lambda\phi(z) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dz} \\ \frac{d}{dz} & 0 \end{pmatrix} \phi(z) \quad [20]$$

avec les conditions frontières  $\begin{pmatrix} \phi(a) \\ \phi(b) \end{pmatrix} \in \ker W$ . Les fonctions  $\phi(z)$  sont appelées fonctions propres.

**Exemple 3** *Nous considérons dans cet exemple l'intervalle  $[0, L]$ . Considérons l'ensemble des fonctions propres sous la forme :*

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} \phi_1(z) \\ \phi_2(z) \end{pmatrix} \quad [21]$$

Le système [20] implique :

$$\frac{d\phi_2(z)}{dz^2} = \lambda^2 \phi_2(z). \quad [22]$$

La solution de cette équation est donnée par

$$\phi_2(z) = Ae^{\lambda z} - Be^{-\lambda z} \quad [23]$$

On en déduit

$$\phi_1(z) = Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z} \quad [24]$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration. À partir des conditions frontières de type Dirichlet, il vient :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{\lambda L} & e^{-\lambda L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad [25]$$

On en déduit l'ensemble des  $k$  valeurs propres en calculant les valeurs de  $\lambda$  qui annulent le déterminant. On obtient :

$$\lambda_k = \frac{2k+1}{2L}\pi i \quad \text{où } i \text{ est la variable complexe } (i^2 = -1) \quad [26]$$

**Lemme 1** Le spectre du système dynamique défini par  $(f, f_\partial, e, e_\partial) = (\dot{x}, f_\partial, \delta_x H, e_\partial) \in \mathcal{D}$  où  $H = \frac{1}{2} \int_0^L x^T \mathcal{L} x$  avec  $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  et les conditions frontières suivantes  $\begin{pmatrix} \delta_x H(0) \\ \delta_x H(L) \end{pmatrix} \in \ker W$  est obtenu par homothétie de facteur  $\sqrt{\alpha\beta}$  du spectre canonique [20].

**Remarque 2** Le choix des conditions frontières doit être compatible avec celles du système canonique. Dans le cas d'une matrice  $\mathcal{L}$  diagonale, les conditions frontières sont inchangées.

**Preuve :** Repartons du problème aux valeurs propres donné par [20] :

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

En considérant maintenant l'équation de fermeture  $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_q H \\ \delta_p H \end{pmatrix}$  avec :  $H(q, p) = \frac{1}{2} \int_0^L (\alpha q^2 + \beta p^2) dz$ , on écrit le problème aux valeurs propres du système dynamique en remplaçant  $x(z, t) = \psi(z)e^{\mu t}$

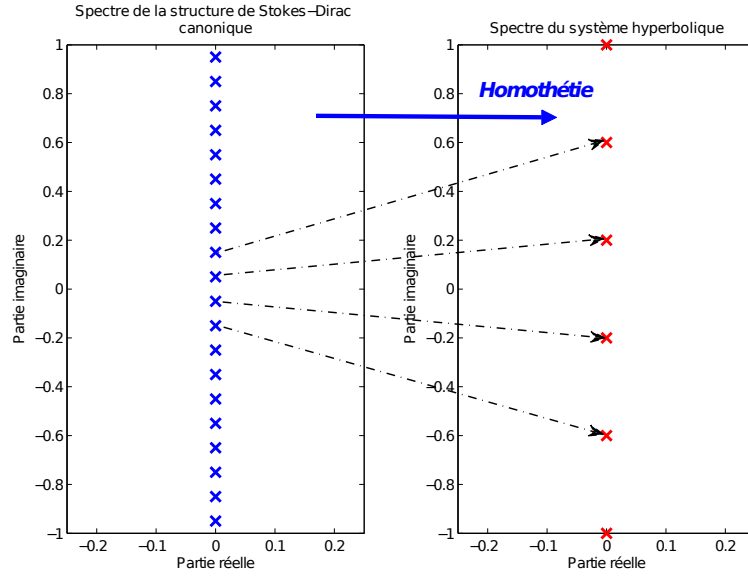
$$\begin{pmatrix} \psi^q \\ \psi^p \end{pmatrix} \mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^q \\ \psi^p \end{pmatrix}$$

On obtient finalement par identification :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} \psi^q \\ \psi^p \end{pmatrix} \frac{\mu}{\sqrt{\alpha\beta}}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^q \\ \psi^p \end{pmatrix} \quad [27]$$

On obtient ainsi la relation d'homothétie  $\mu = \sqrt{\alpha\beta}\lambda$  ■

**Exemple 4** On reprend ici l'exemple traité dans 3 mais en choisissant pour équation de fermeture  $\alpha = \beta = 4$  et les conditions limites  $\delta_{x_1} H(L) = \delta_{x_2} H(0) = 0$  équivalentes à  $\phi_1(L) = \phi_2(0) = 0$ . Le facteur d'homothétie est donc  $k = 4$  comme le montre la comparaison des deux spectres de la figure 1.



**Figure 1.** Comparaison entre spectre canonique et spectre du système dynamique avec  $\alpha = \beta = 4$

**Lemme 2** Le spectre du système dynamique défini par  $((\dot{x}, f_2), f_\partial, (x, e_2), e_\partial) \in \mathcal{D}$  où  $f_2 = De_2$  ( $D$  est constant), les conditions frontières étant choisies en conséquence en fonction de celle du spectre canonique [20]. Plus précisément, ce spectre est défini par l'ensemble des valeurs  $\mu \in \mathbb{C}$  telles que :

$$\mu = D|\lambda|^2 e^{2i \arg \lambda} \quad [28]$$

**Preuve :** Considérons le système différentiel :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad [29]$$

où  $f_1 = \dot{x}$  et  $e_1 = x$  et

$$f_2 = De_2 \quad [30]$$

En utilisant le principe de séparation des variables, l'équation [29] peut s'écrire en posant,  $x = e_1 = \xi(z)e^{\mu t}$ ,  $e_2 = \frac{\partial \xi}{\partial z}(z)e^{\mu t} = \xi_d(z)e^{\mu t}$  :

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(z) \\ \xi_d(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_d(z) \\ \xi_d(z) \end{pmatrix}. \quad [31]$$

Il est connu que les valeurs propres  $\mu$  sont réelles négatives car l'opérateur  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$  avec les conditions frontières homogènes est auto-adjoint. On aboutit après calcul à :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i\sqrt{|\mu|} & 0 \\ 0 & \sqrt{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(z) \\ \xi_d(z) \end{pmatrix} \frac{i\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{D}} \\ = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sqrt{|\mu|} & 0 \\ 0 & \sqrt{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(z) \\ \xi_d(z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [32]$$

qui doit être identifié à :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

En posant  $\lambda = |\lambda|e^{i \arg \lambda}$  il vient :

$$\mu = D|\lambda|^2 e^{2i \arg \lambda}$$

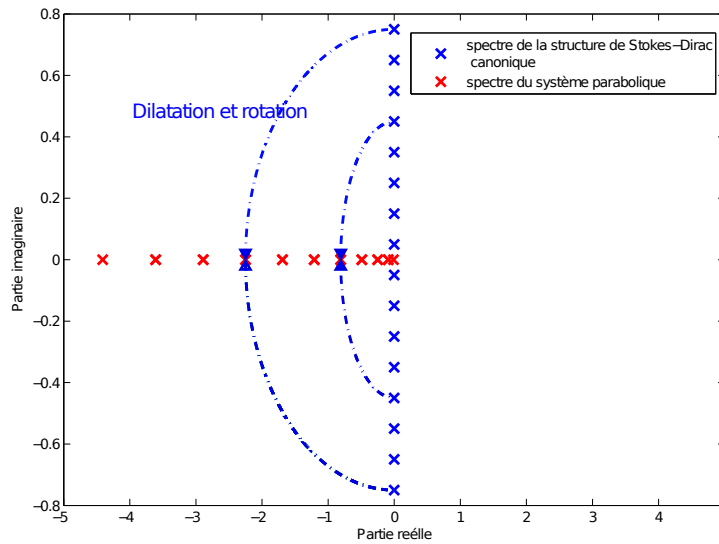
**Exemple 5** Reprenons l'exemple 3. Les valeurs propres du système canonique sont définies par :

$$\lambda_k = \frac{2k+1}{2L}\pi i = \frac{2k+1}{2L}e^{\frac{\pi}{2}i}$$

Considérons maintenant le système diffusif [14] où  $D = 2$  il vient :

$$\mu_k = \left(\frac{2k+1}{L}\right)^2 e^{\pi i} = -\left(\frac{2k+1}{L}\right)^2$$

comme illustré sur la figure 2.



**Figure 2.** *Obtention des valeurs propres du système diffusif par rotation et dilatation du spectre*

#### 4. Convergence d'un schéma de discrétisation structuré de type éléments finis mixtes appliquée à un système de diffusion

Dans cette section nous nous intéressons à l'étude de la convergence spectrale d'un schéma de discrétisation de type éléments finis mixtes sur l'exemple 2 de la conduction de chaleur. Ce schéma de discrétisation prend en compte la nature géométrique des variables d'énergie et des variables de ports qui sont, dans les exemples présentés précédemment des 0-formes et des 1-formes différentielles. Ces variables de natures géométriques différentes sont approchées dans des espaces d'éléments finis eux aussi différents. Cette idée qui conduit à des éléments finis mixtes à été proposée pour la discrétisation des équations de Maxwell par Bossavit dans (Bossavit, 1998; Bossavit, 1991). Elle a été aussi appliquée à la réduction de la formulation hamiltonienne à ports des équations de la ligne de transmission sans perte (Golo *et al.*, 2004) à la colonne d'adsorption (Baaiu *et al.*, 2009) et au cas des équations de Saint-Venant (Hamroun *et al.*, 2007). L'approche a également été généralisée pour la définition de méthodes pseudo-spectrales mixtes (polynomiales) symplectiques (Moulla *et al.*, 2011).

Considérons les équations de l'exemple 2 :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad e_2 = Df_2 \quad [33]$$

On subdivise l'intervalle  $[0, L]$  en  $N$  intervalles élémentaires  $[a, b]$  et on projette les formes différentielles d'ordre un  $\begin{pmatrix} f_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$  et les formes différentielles d'ordre zéro (les fonctions)  $\begin{pmatrix} e_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  sur des bases d'approximation différentes définies par :

- pour les formes d'ordre un :  $w_{ab}^{f_1} = w_{ab}^{e_2} = \frac{dz}{b-a}$
- pour les fonctions  $w_a^{e_1} = w_a^{f_2} = \frac{z-a}{b-a}$ , et  $w_b^{e_1} = w_b^{f_2} = \frac{b-z}{b-a}$

de telle sorte que la structure géométrique soit préservée.

On obtient ainsi sur chaque élément  $[a, b]$  le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} f_1^{ab} \\ e_2^{ab} \\ f_{\partial b} \\ e_{\partial a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^{ab} \\ f_2^{ab} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\partial b} \\ f_{\partial a} \end{pmatrix} \quad [34]$$

$$\begin{pmatrix} f_{\partial b} \\ e_{\partial a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^{ab} \\ f_2^{ab} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha-1}{\alpha} \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\partial b} \\ f_{\partial a} \end{pmatrix}$$

où  $f_1^{ab}, e_2^{ab}, e_1^{ab}, f_2^{ab}$  sont des fonctions du temps représentant les valeurs moyennes des variables  $f_1, e_2, e_1, f_2$  sur l'élément  $[a, b]$ .  $e_{\partial a}, e_{\partial b}, f_{\partial a}, f_{\partial b}$  représentent les variables à la frontière de l'élément. Dans (Peng *et al.*, 2007) il est montré que la structure [34] est une structure de Dirac.

Le paramètre  $\alpha$  est un paramètre géométrique lié à la définition des variables extensives  $e_1^{ab}, f_2^{ab}$  sur l'intervalle élémentaire. Pour plus de détails sur ce degré de liberté lié au noyau de la dérivée extérieure, se reporter à (Baaiu *et al.*, 2009; Moulla *et al.*, 2011). Dans ce qui suit nous nous limitons au cas  $\alpha = 1$ , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} f_1^{ab} \\ e_2^{ab} \\ f_{\partial b} \\ e_{\partial a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^{ab} \\ f_2^{ab} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\partial b} \\ f_{\partial a} \end{pmatrix} \quad [35]$$

$$\begin{pmatrix} f_{\partial b} \\ e_{\partial a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^{ab} \\ f_2^{ab} \end{pmatrix}$$

Par une mise en série des éléments  $[a, b]$  à travers une jonction traduisant la continuité des variables de flux et l'égalité des variables d'effort à la frontière, on obtient un modèle global sur l'intervalle  $[0, L]$  de la forme :

$$\begin{pmatrix} F_1^{ab} \\ E_2^{ab} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} E_1^{ab} \\ F_2^{ab} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} e_{\partial L} \\ f_{\partial 0} \end{pmatrix} \quad [36]$$

où  $F_1^{ab}, E_2^{ab}, E_1^{ab}, F_2^{ab}$  sont respectivement les vecteurs de dimension  $N$  de concaténation des variables  $f_1^{ab}, e_2^{ab}, e_1^{ab}, f_2^{ab}$  des différents éléments.  $A$  est la matrice définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ -M^T & 0 \end{bmatrix} \quad [37]$$

avec  $M \in \mathbb{R}^{N,N}$  telle que :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad [38]$$

La matrice  $A$  est antisymétrique et ses valeurs propres  $\lambda$  sont complexes conjuguées. Elles satisfont :

$$\det(\lambda^2 I - M^T M) = 0 \quad [39]$$

Supposons que  $\mu$  soit une valeur propre de  $A_M = M_k^T M_k$  où  $M_k$  contient les  $k$  premières lignes et les  $k$  premières colonnes de  $M$ , c'est-à-dire :

$$A_M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad [40]$$

Définissons le polynôme  $P_k(\mu) = \det(\mu I - A_M)$ . Ce polynôme satisfait la récurrence suivante :

$$P_k = (\mu + 2)P_{k-1} - P_{k-2} \quad [41]$$

avec  $P_0 = 1$  et  $P_1 = 1 + \mu$ . Cette récurrence correspond à celle que satisfont les polynômes de Tchébycheff sauf pour le premier terme. Cependant  $P_k$  est un polynôme orthogonal et nous savons que ses racines sont réelles. Après résolution ( voir le détail du calcul dans l'annexe) on trouve :

$$\mu_k = \lambda_k^2 = 2 \cos \left( \frac{2k+1}{2n+1} \pi \right) - 2 \quad [42]$$



Considérons maintenant le cas où le nombre d'éléments  $N$  est important et examinons les  $k$  premières valeurs propres ( $k \ll N$ ). En utilisant un développement en série de la fonction cosinus il vient :

$$\mu_k = \lambda_k^2 = - \left( \frac{2k+1}{2n+1} \pi \right)^2 + o \left( \frac{1}{N^3} \right) \quad [43]$$

Il faut remarquer que, du fait du choix du schéma de discrétisation, les valeurs propres  $\lambda_k$  dépendent de la taille des éléments  $[a, b]$  qui est dans notre cas égale à  $\frac{L}{N}$ . Pour pouvoir comparer avec les valeurs propres de la structure en dimension infinie définies dans [26], on définit les valeurs propres normalisées comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_k &= \frac{N}{L} \lambda_k = \frac{N}{L} \frac{2k+1}{2N+1} \pi i + o \left( \frac{1}{N^2} \right) \\ &= \frac{2k+1}{2L} \pi i \left( 1 - \frac{1}{2N} + o \left( \frac{1}{N} \right) \right), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad [44]$$

On obtient finalement :

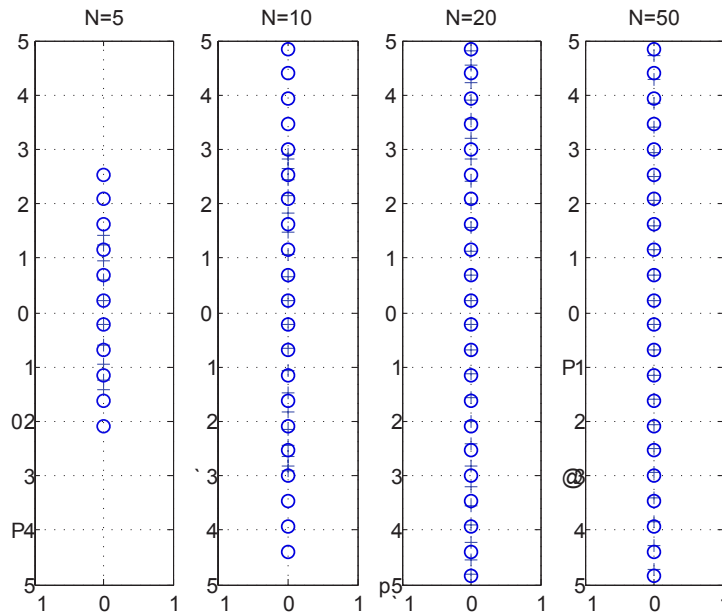
$$\hat{\lambda}_k = \frac{2k+1}{2L} \pi i \left( 1 - \frac{1}{2N} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad [45]$$

On peut déduire qu'avec les conditions frontières choisies, le spectre réduit associé à la structure de Dirac du modèle réduit converge vers le spectre discret théorique.

Ce résultat, présenté dans le cas de la conduction, reste général puisque la même structure  $A$  est obtenue pour le modèle de la corde vibrante ou l'équation de Saint-Venant (Hamroun *et al.*, 2007).

Enfin, nous présentons en figure 3 des résultats numériques concernant l'évolution des valeurs propres du modèle réduit par rapport au spectre discret en fonction du nombre de pas de discrétisation utilisés.

On peut remarquer que pour  $n = 50$ , les dix premières valeurs propres sont parfaitement approchées.



**Figure 3.** Comparaison des valeurs propres du modèle réduit par rapport au spectre discret pour différents  $N$  (●) spectre de la structure de Stokes-Dirac (+) spectre de la structure de Dirac du modèle réduit

## 5. Conclusion

Dans cet article on s'est intéressé aux systèmes linéaires de dimension infinie issus de lois de conservation, tels ceux décrits par les équations d'onde ou de la chaleur.

Bien qu'ayant des solutions différentes, ces systèmes peuvent être représentés à l'aide d'une même structure géométrique linéaire appelée structure canonique de Stokes-Dirac. On a montré que les spectres des exemples hyperbolique et parabolique considérés peuvent être obtenus à partir du spectre associé à cette structure de Stokes-Dirac par rotation, homothétie ou dilatation.

Dans un second temps, on a appliqué ces résultats pour prouver la convergence d'une méthode de réduction de type éléments finis mixtes mise en œuvre sur un problème de diffusion de telle sorte que la structure géométrique du système réduit soit conservée. On a montré qu'avec cette méthode le spectre du modèle réduit converge vers le spectre discret de dimension infinie associé à la structure canonique de Stokes-Dirac.

Ces premiers résultats concernent l'étude des valeurs propres dans le cas d'un hamiltonien séparable. Une première perspective concerne l'étude d'exemples dont

l'hamiltonien est non séparable, comme dans l'équation de Saint-Venant par exemple. Une seconde perspective concerne le cas des systèmes dont les paramètres dépendent de la variable d'espace.

## 6. Bibliographie

- Baaiu A., Couenne F., Lefèvre L., Le Gorrec Y., Tayakout M., « Energy based discretization of an adsorption column », *Proc. of Adchem, Brazil*, 2006.
- Baaiu A., Couenne F., Lefèvre L., Le Gorrec Y., Tayakout M., « Structure preserving infinite dimensional model reduction. Application to Adsorption Processes », *Journal of Process Control*, vol. 19, n° 3, p. 394-404, 2009.
- Bossavit A., « Differential forms and the computation of fields and forces in electromagnetism », *European Journal of Mechanics B/Fluids*, vol. 10, p. 474-488, 1991.
- Bossavit A., *Computational Electromagnetism*, Academic Press, 1998.
- Courant T., « Dirac manifolds », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 319, p. 631-661, 1990.
- Curtain R., Zwart H., *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, n° 21 in *Texts in Applied Mathematics*, Springer Verlag New York inc., 1995.
- Duindam V., Macchelli A., Stramigioli S., (Eds.) H. B., *Modeling and Control of Complex Physical Systems : The Port-Hamiltonian Approach*, Springer Verlag New York inc., 2009.
- Golo G., Talasila V., Van der Schaft A., Maschke B., « Hamiltonian discretization of boundary control systems », *Automatica*, vol. 40, n° 5, p. 757-771, 2004.
- Hamroun B., Lefèvre L., Mendes E., « Reduction for Open channel Irrigation Systems », *proc. of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, USA*, 2007.
- Le Gorrec Y., Zwart H., Maschke B., « Dirac structures and Boundary Control Systems associated with Skew-Symmetric Differential Operators », *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 42, n° 5, p. 1864-1892, 2005.
- Le Pourhiet A., *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : une première approche*, Éditions Cépaduès, Toulouse, 1988.
- Maschke B., Ortega R., van der Schaft A. J., « Energy- based Lyapunov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation », *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 45, n° 8, p. 1498- 1502, 2000.
- Moulla R., Lefèvre L., Maschke B., « Geometric pseudo-spectral method for spatial integration of dynamical systems », *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, special issue on Modelling, Analysis and Control of Distributed Parameter Systems*, Kurt Schlacher and Markus Schoberl editors, vol. 17, n° 1, p. 85-104, 2011.
- Peng H., Baaiu A., Couenne F., Le Gorrec Y., « Energy based discretization of a class of distributed parameters processes - Comparison with classical approach », *46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, Louisiana USA*, 2007.
- van der Schaft A., Maschke B., « Hamiltonian formulation of distributed-parameter systems with boundary energy flow », *Journal of Geometry and Physics*, vol. 42, p. 166-194, 2002.
- Villegas J. A., *A port-Hamiltonian approach to distributed parameter systems*, PhD thesis, May, 2007.

**Annexe. Détail de calcul du spectre de la structure du modèle réduit**

Pour résoudre l'équation aux récurrences d'ordre 2 suivante :

$$P_k = (\mu + 2)P_{k-1} - P_{k-2} \quad [46]$$

avec  $P_0 = 1$  et  $P_1 = 1 + \mu$ . On procède au changement de variables suivant :

$$u = \frac{\mu + 2}{2} \quad [47]$$

Il vient,

$$P_k = 2uP_{k-1} - P_{k-2} \text{ et } P_1 = 2u - 1, P_0 = 1 \quad [48]$$

Cherchons  $P_k$  sous la forme :

$$P_k = Ar_1^k + Br_2^k \text{ avec } A, B, r_1, r_2 \in \mathbb{C} \quad [49]$$

Cela revient à résoudre :

$$r^2 - 2ur - 1 = 0 \quad [50]$$

Restreignons-nous à  $u \in [-1, 1]$  et procédons au changement de variables suivant :

$$u = \cos(y) \text{ avec } y \in [0, \pi] \quad [51]$$

Les solutions  $r_1, r_2$  de [50] sont donc :

$$r_{1,2} = \cos(y) \pm \sqrt{(\cos(y))^2 - 1} = e^{\pm iy} \quad [52]$$

Le polynôme  $P_k$  peut donc s'écrire :

$$P_k = Ae^{iky} + Be^{-iky} \quad [53]$$

Intéressons-nous maintenant aux conditions que doit satisfaire  $P_k$  en 0 et en 1. Il vient :

$$\begin{cases} P_0 = A + B = 1 \\ P_1 = Ae^{iy} + Be^{-iy} = 1 \end{cases} \quad [54]$$

Soit :

$$A = \frac{e^{iy} - 1}{e^{iy} - e^{-iy}} \text{ and } B = \frac{1 - e^{-iy}}{e^{iy} - e^{-iy}} \quad [55]$$

Par conséquent, le polynôme  $P_k$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{e^{iy} - 1}{e^{iy} - e^{-iy}} e^{iky} + \frac{1 - e^{-iy}}{e^{iy} - e^{-iy}} e^{-iky} \\ &= \frac{1}{e^{iy} - e^{-iy}} \left( e^{i(k+1)y} - e^{iky} + e^{-iky} - e^{-i(k+1)y} \right) \\ &= \frac{1}{2i \sin y} (2i \sin((k+1)y) - 2i \sin(ky)) \end{aligned} \quad [56]$$

Ou encore en utilisant les relations trigonométriques :

$$P_k(y) = \frac{\cos\left(\frac{2k+1}{2}y\right)}{\cos\left(\frac{y}{2}\right)} \quad [57]$$

Les valeurs propres associées à la discrétisation en  $n$  éléments sont liées aux racines du polynôme :

$$P_n(y) = \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}y\right)}{\cos\left(\frac{y}{2}\right)} \quad [58]$$

Les  $n$  racines  $y_n$  de  $P_n$  sont obtenues en résolvant :

$$P_n(y) = 0 \iff \frac{2n+1}{2}y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \{0, \dots, n-1\} \quad [59]$$

Ce qui équivaut à :

$$y_l = \frac{2k+1}{2n+1}\pi \quad k \in \{0, \dots, n-1\} \quad [60]$$

Revenons aux variables  $\mu$  et  $\lambda$  et calculons :

$$\mu_k = \lambda_k^2 = 2 \cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right) - 2 \quad [61]$$

**ANNEXE POUR LE SERVICE FABRICATION**  
A FOURNIR PAR LES AUTEURS AVEC UN EXEMPLAIRE PAPIER  
DE LEUR ARTICLE ET LE COPYRIGHT SIGNÉ PAR COURRIER  
LE FICHIER PDF CORRESPONDANT SERA ENVOYÉ PAR E-MAIL

1. ARTICLE POUR LA REVUE :

*JESA – 45/2011. Contrôle des systèmes à paramètres répartis*

2. AUTEURS :

*Yann Le Gorrec<sup>\*</sup> — Hui Peng<sup>\*\*</sup> — Laurent Lefèvre<sup>\*\*\*</sup> — Boussad  
Hamroun<sup>\*\*</sup> — Françoise Couenne<sup>\*\*</sup>*

3. TITRE DE L'ARTICLE :

*Systèmes hamiltoniens à ports de dimension infinie : réduction et proprié-*

4. TITRE ABBRÉGÉ POUR LE HAUT DE PAGE MOINS DE 40 SIGNES :

*Systèmes hamiltoniens*

5. DATE DE CETTE VERSION :

*6 mars 2012*

6. COORDONNÉES DES AUTEURS :

– adresse postale :

<sup>\*</sup> FEMTO-ST AS2M, ENSMM, 24 rue Alain Savary, 25 000 Besançon  
France,  
Yann.Le.Gorrec@ens2m.fr

<sup>\*\*</sup> LAGEP, Université de Lyon, F-69622, Lyon, France; Université Lyon  
1, Villeurbanne, nom@lagep.univ-lyon1.fr

<sup>\*\*\*</sup> LCIS, INP Grenoble, 50, rue Barthélémy de Laffemas BP54 26902  
VALENCE Cedex 09 France, laurent.lefevre@esisar.inpg.fr

– téléphone : 00 00 00 00 00

– télécopie : 00 00 00 00 00

– e-mail : yann.le.gorrec@ens2m.fr

7. LOGICIEL UTILISÉ POUR LA PRÉPARATION DE CET ARTICLE :

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, avec le fichier de style article-hermes.cls,  
version 1.23 du 17/11/2005.

8. FORMULAIRE DE COPYRIGHT :

Retourner le formulaire de copyright signé par les auteurs, téléchargé sur :  
<http://www.revuesonline.com>